

## ANALIZA EFEKATA PRIMENE GEOGEBRA-E NA PRAĆENJE NASTAVE GEOMETRIJE

### ANALYSIS OF GEOGEBRA APPLICATION IN GEOMETRY TEACHING

Miroslav Maksimović<sup>1</sup>, Nataša Kontrec<sup>2</sup>, Stefan Panić<sup>3</sup>, Milena Petrović<sup>4</sup>

<sup>1234</sup>Prirodno-matematički fakultet u Kosovskoj Mitrovici

<sup>1</sup>miroslav.maksimovic@pr.ac.rs, <sup>2</sup>natasa.kontrec@pr.ac.rs, <sup>3</sup>stefan.panic@pr.ac.rs,

<sup>4</sup>milena.petrovic@pr.ac.rs

**Apstrakt:** Istraživanja su pokazala da uprkos brojnim prednostima primene savremenih tehnologija u nastavi matematike sam proces uvođenja istih u učionice je spor i dosta složen. Upravo iz tih razloga, ovaj rad istražuje mogućnosti uvođenja matematičkog softvera u nastavni proces i kakav bi to imalo uticaj na nastavu ali i razumevanje prezentovanog sadržaja od strane studenata. Zapravo, ovaj rad ispituje efekte koje bi uvođenje programskog paketa Geogebra imalo na nastavu geometrije na odseku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Kosovskoj Mitrovici. Takođe, ispitan je uticaj primene Geogebra-e na motivisanost, entuzijazam i samopouzdanje studenata koji slušaju ovaj predmet.

**Ključne reči:** GeoGebra, Nastava geometrije, efekti na nastavni proces

**Abstract:** Previous researches have shown that despite many advantages of using modern technologies in mathematics education, the process of embedding them into classrooms is slow and complex. For that reason, this paper explores the possibilities of introducing mathematical software into the teaching process and what impact it would have on the teaching and understanding of the presented content by students. In fact, this paper examines the effects that the introduction of the Geogebra would have on the teaching of geometry at the Department of Mathematics at the Faculty of Science and Mathematics in Kosovska Mitrovica. Also, we examined the impact of Geogebra software on the motivation, enthusiasm and confidence of students who are enroll in this course.

**Key words:** GeoGebra, Teaching Geometry, Effects on Teaching Process

## 1. UVOD

Živimo u eri digitalizacije, okruženi smo raznim pametnim uređajima koji na svom operativnom sistemu nude mogućnost instaliranja brojnih matematičkih softvera za crtanje i proučavanje funkcija i drugih geometrijskih pojmova. Međutim, retki su primeri koji pokazuju da se takvi softveri koriste u samom nastavnom procesu [2]. Uopšteno, kada je u pitanju nastava matematike, istraživanja su pokazala [4] da predavač mora biti u stanju da napravi balans između mentalnih, klasičnih i digitalnih sredstava kako bi objasnio apstraktne matematičke koncepte koji su često nerazumljivi studentima.

Upravo iz gore navedenih razloga u ovom radu se bavimo ispitivanjem mogućnosti uključivanja programskog paketa GeoGebra u kombinaciji sa klasičnom nastavom na predmetu Geometrija na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Prištini, sa privremenim sedištem u Kosovskoj Mitrovici.

Zašto GeoGebra? GeoGebra je besplatan, dinamički matematički softver koji se može koristiti za rešavanje geometrijskih ali i algebarskih problema. Njegova osnovna ideja je da objedini geometriju i algebru u jedinstven matematički paket koju je moguće koristiti na svim nivoima obrazovanja, kao što je i predstavljeno u radovima [6, 7, 8]. Prevedena je na veliki broj stranih jezika, uključujući i srpski, a broj njenih korisnika konstantno raste [3].

## 2. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

Cilj istraživanja prikazanog u ovom radu je da se ispitaju efekti koje GeoGebra ima na usvajanje gradiva iz geometrije i da se studenti dodatno motivišu i podstaknu na samostalno korišćenje ovog softverskog paketa u procesu učenja. U istraživanju su učestvovali svi studenti koji slušaju predmet Geometrija 2 na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kosovskoj Mitrovici. Kako je ovo izborni predmet, formirana je grupa od svega 10 studenata. Nastavna jedinica je prvo obrađena na vežbama primenom klasične nastavne metode karakteristične za ovu vrstu predmeta, a zatim su isti problemi rešeni primenom GeoGebra-e. Nakon toga, studenti su anonimno popunjavali upitnik sa 7 pitanja, na koja su odgovarali uglavnom sa DA i NE.

Pitanja su sledeća:

1. Da li je ovo vaš prvi susret sa GeoGebra-om?
2. Da li vam se rad sa GeoGebra-om čini komplikovanim?
3. Da li su vam časovi Geometrije uz korišćenje GeoGebra-e zanimljivi?
4. Da li vam časovi Geometrije uz korišćenje GeoGebra-e pomažu da bolje razumete gradivo?
5. Kako ocenjujete časove u kojima se koristi GeoGebra u poređenju sa „klasičnim“ časovima?

6. Da li su vam određene stvari preciznije i očiglednije u GeoGebra-i u poređenju sa „klasičnim“ načinom rada?
7. Smatrate li da treba u što više časova da bude zastupljeno korišćenje GeoGebra-e?

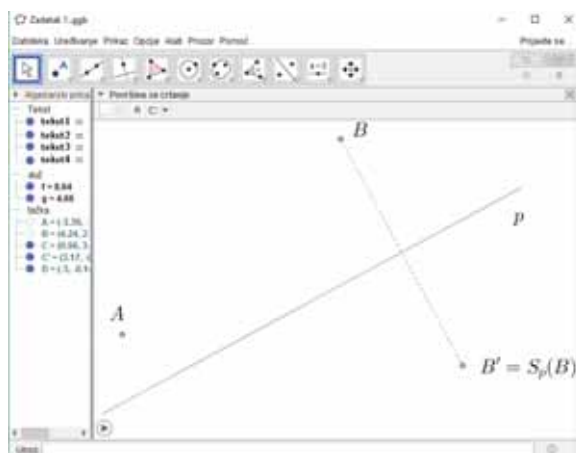
U narednom poglavlju rada opisana je nastavna jedinica obrađena na vežbama.

### 3. PROUČAVANJE OSNIH SIMETRIJA

Geometrija se, kao deduktivna teorija, zasniva na aksiomama i tvrđenjima izvedenih iz tih aksioma. Upravo zato, neophodno je i poznavanje teorije Izometrijskih transformacija izložene u radovima [5, 9, 10]. Kao što je napomenuto, studenti su već upoznati sa ovom teorijom pa u ovom poglavlju rada predstavljamo načine da se neki od problema, u ovom slučaju vezanih za osnu simetriju, reše korišćenjem GeoGebra-e.

*Zadatak 1.* U ravni  $E^2$  data je prava  $p$  i dve tačke  $A$  i  $B$  koje se nalaze sa iste strane te prave  $s$ . Konstruisati tačku  $X \in p$  takvu da zbir duži  $AX + BX$  bude minimalan.

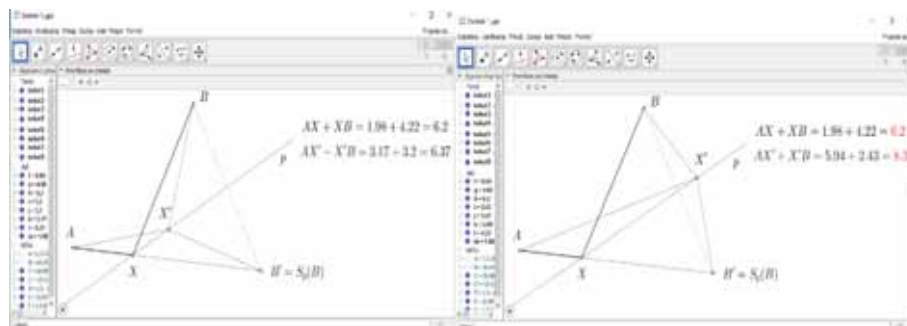
*Rešenje.* U prozoru GeoGebra-e nacrtamo date elemente: pravu  $p$  i tačke  $A$  i  $B$ . S obzirom na to da obrađujemo osne simetrije, jednu od tačaka preslikamo u odnosu na pravu  $p$ . Neka to bude tačka  $B$ , pa dobijamo njenu osno-simetričnu tačku  $B' = S_p(B)$ , kao što je prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1.

Dobijenu tačku  $B'$  povežemo sa tačkom  $A$  i presek duži  $AB'$  sa pravom  $p$  označimo sa  $X$ . Da bi dokazali da je to zaista i tražena tačka, za koju se zahteva da zbir  $AX + BX$  bude minimalan, izabraćemo proizvoljnu tačku  $X' \in p$  i pokazati da je za nju zbir  $AX' + BX'$  veći

od  $AX + BX$ . U tom cilju, za pregledniji dokaz, ćemo ubaciti kao tekst zbir duži  $AX' + BX'$  i  $AX + BX$  (slika 3.2.).



Slika 3.2.

Slika 3.3.

GeoGebra stvara interaktivne, dinamičke objekte, od kojih se određeni mogu i animirati po izboru. Naš cilj jeste da pomeramo tačku  $X'$  i dokažemo traženu nejednakost. Primećujemo da se zbir  $AX' + BX'$  približava zbiru  $AX + BX$  u okolini tačke  $X$ , a udaljavanjem tačke  $X'$  od  $X$  se sve više povećava, što nas dovodi do zaključka da je konstruisana tačka  $X$  zaista odgovarajuća (slika 3.3.).

**Zadatak 2.** U zadati krug  $k(O, r)$  ravni  $E^2$  konstruisati trougao  $\triangle ABC$  kome su stranice  $BC, CA, AB$  paralelne redom datim pravama  $a, b, c$ .

**Rešenje.** Ovaj zadatak smo izabrali iz razloga što studentima problem prave konstruktivni zadaci koji se rade dugo, gotovo i po čitav jedan čas. A drugi razlog je da uvidimo da li je njima jasniji pregled rešenja zadataka pri obradi u GeoGebra-i.

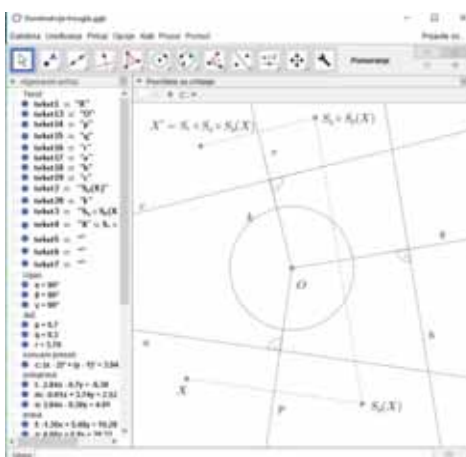
Ovakav tip zadataka se sastoji iz četiri koraka: analize, konstrukcije, dokaza i diskusije.

Pri analiziranju, pretpostavljamo da je zadatak rešen. Pošto nam je dat samo krug i prave, jasno je da će normale  $p, q, r$  iz centra kruga  $O$  na datim pravama  $a, b, c$ , biti normalne i na stranicama tog trougla, jer je uslov da su one paralelne sa pravama. Sa druge strane, možemo posmatrati kompoziciju triju osnih simetrija  $J = S_r \circ S_q \circ S_p$ . Ova kompozicija predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju. S obzirom na to da centar kruga pripada svim osama simetrije, centar predstavlja invarijantnu tačku, pa je posmatrana kompozicija zapravo osna simetrija<sup>2</sup>. Proverom utvrđujemo da je i tačka  $B$  takođe invarijantna, što znači da prava  $OB$  predstavlja osu te osne simetrije.

<sup>1</sup>Za opravdanje ovog postupka, videti, npr. [5] str. 65.

<sup>2</sup>Teorema 3.2.3 u [5].

Najpre konstruišemo ono što nam je dato: krug  $k(O, r)$  i prave  $a, b, c$ . Zatim normale  $p, q, r$  iz centra  $O$  kruga  $k$  na datim pravama  $a, b, c$ . Uočimo proizvoljnu tačku  $X \neq O$  i preslikajmo je osnom simetrijom  $S_r \circ S_q \circ S_p(X) = X'$  (slika 3.4.).

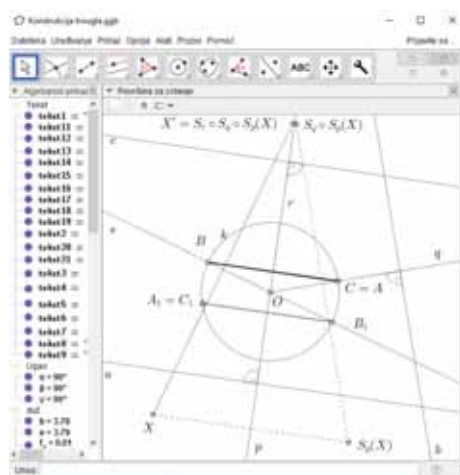


Slika 3.4.

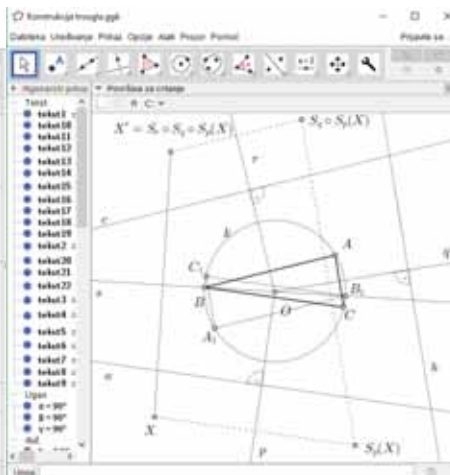
Osa simetrije ove osne simetrije je zapravo simetrala  $s$  duži  $XX'$ , pa će se tačka  $B$  naći u preseku ove simetrale i kruga. Ostale tačke  $A$  i  $C$  konstruišemo tako da je  $BC \parallel a$ ,  $BA \parallel c$  i  $CA \parallel b$ .

Dokaz sledi neposredno na osnovu konstrukcije.

Zadatak ima dva rešenja, jer je  $s \cap k = \{B, B_1\}$ . Međutim, ako postoji jedan par paralelnih prava između  $a, b$  i  $c$  zadatak nije rešiv (slika 3.5. i 3.6.).



Slika 3.5.



Slika 3.6.

#### 4. REZULTATI

Studenti su pokazali izuzetno interesovanje za ovaj vid nastave i pomno su pratili izlaganje nastavnika. Obradom rezultata ankete mogu se izvesti sledeći zaključci:

- Studenti su se već ranije sretali sa GeoGebra-om i poznavali su rad u ovom matematičkom softveru.
- Svi ispitani studenti smatraju da ovaj matematički softver nije komplikovan i da je izvođenje nastave uz korišćenje GeoGebra-e zanimljivije i produktivnije, te zbog toga njegovo korišćenje u okviru kursa Geometrije treba intenzivirati.
- Istovremeno su i oni rešavali probleme i u poređenju sa klasičnim časovima, ovde su se bolje snašli iz razloga što su nakon završetka zadatka mogli da lakše uočavaju odnose između objekata i, pritom, da „diskutuju“ o rešenju sa Geogebra-om.

#### 5. ZAKLJUČAK

Pristup predavanju i učenju geometrije ne treba da bude čisto teorijski već je potrebno uključiti postojeća pomoćna sredstva poput GeoGebre, Mathematica-e, MatLaba, kako bi se studenti dodatno zainteresovali i motivisali za taj predmet. GeoGebra je besplatan softver dostupan na srpskom jeziku i kao takav pogan za upotrebu, ali, ipak, uglavnom od nastavnika zavisi da li će ga koristiti u nastavi. Ono što je ovaj rad pokazao jeste da je rešavanje zadataka pomoću GeoGebra preciznije i brže, a korisnici su u mogućnosti i da „kompjuterski“ provere traženi rezultat jer GeoGebra izrađuje interaktivne matematičke modele tj. određeni objekti se

moгу pomerati i na pregledan način se mogu videti odnosi objekata. Na primer, kod diskusije u drugom zadatku smo pomeranjem jedne prave videli da zadatak nema rešenje u slučaju kada je ta prava paralelna sa drugom. Samim tim, ostaje nam više vremena da bolje i jasnije sagledamo sve bitne probleme oko rešavanja zadataka, a to je i od pomoći kod njegovog klasičnog načina rešavanja, jer je činjenica da nam korišćenje GeoGebra-e može upotpuniti izvođenje nastave Geometrije, a ne i u potpunosti zameniti klasičan način rada. Ovo istraživanje je pokazalo da Geogebra ima pozitivan uticaj na motivisanost, entuzijizam i samopouzdanje studenata i da oni smatraju da korišćenje ovog softver treba uvrsti u redovno izvođenje nastave.

## LITERATURA

- [1] Alessi S.M., Trollip S.R., (2001), *Multimedia for learning: Methods and development*, 3<sup>rd</sup> ed. Boston, Allyn and Bacon.
- [2] Arbain N., Shukor N.A., (2015), *The effects of GeoGebra on students achievement*, Procedia - Social and Behavioral Sciences 172 (2015) 208 – 214.
- [3] Hohenwarter, M. (2008), *Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*, 11<sup>th</sup> International Congress n Mathematical Education.
- [4] Joglar Prieto, N., et al. (2013), *Designing Geometry 2.0 learning environments: a preliminary study with primary school students*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (ahead-of-print): 1-21.
- [5] Lopandić D., (1989), *Geometrija*, Naučna knjiga, Beograd.
- [6] Ljajko E., Ibro V., (2013) *Development of ideas in a GeoGebra – aided mathematics instruction*. Mevlana International Journal of Education (MIJE) Vol. 3(3) Special Issue: Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environment pp. 1- 7, 01 July, 2013
- [7] Ljajko E., (2014), *Uticaj GeoGebra-e na predavanje i učenje analitičke geometrije u srednjoj školi*, doktorska disertacija, PMF, Novi Sad.
- [8] Radovic S., Stevanovic A., Radojic M., Maric M., (2013), *Interaktivni prikaz površine geometrijskih figura primenom programskog paketa GeoGebra*, Inovacije u nastavi, XXVI, 2013/3, 135–145.
- [9] Remsing C., (2006), *Transformation Geometry*, Rhodes University, Grahamstown.
- [10] Stanković M., (2006), *Osnovi geometrije*, PMF, Niš.